Costo reducido

Primera interpretación

Para cada problema de programación lineal, asociado con cada variable, hay un valor de **costo reducido**. Sin embargo, el valor de costo reducido solo es distinto de cero cuando el valor óptimo de una variable es cero. Una forma intuitiva de pensar en la variable de costo reducido es pensar en ella como si indicara **cuánto debe reducirse el costo de la actividad representada por la variable antes de que se realice cualquier actividad**. Más precisamente,

... el valor de costo reducido indica cuánto debe mejorarse el coeficiente de la función objetivo en la variable correspondiente antes de que el valor de la variable sea positivo en la solución óptima.

En el caso de un problema de **minimización**, "mejorado" significa "reducido". Entonces, en el caso de un problema de minimización de costos, donde los coeficientes de la función objetivo representan el costo unitario de las actividades representadas por las variables, los coeficientes de "costo reducido" indican cuánto tendría que reducirse cada coeficiente de costo antes de que la actividad representada por la variable correspondiente sea rentable. En este caso, los costos reducidos son positivos y **para lograr que la actividad asociada a un costo reducido positivo entre a la base óptima con valor positivo, el coeficiente de costo asociado debería reducirse al menos en el valor del costo reducido.**

Ejemplo:

Para el problema:

$$Min\, z = (3x_1 + 2x_2)$$

$$sa.$$

$$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{2} \geq 1$$

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{4} \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Su solución óptima se obtiene en $x_1^{*} = 0, x_2^{*} = 4, z^{*} = 8$

Los costos reducidos son $\bar{c}_1 = 1, \bar{c}_2 = 0$.

Esto es compatible con el teorema de holgura complementaria, ya que $x_1^{*}\bar{c}_1 = 0, x_2^{*}\bar{c}_2 = 0.$

Para lograr que la variable x_1 tenga un valor positivo en la solución óptima, se requiere **disminuir** su costo actual en **por lo menos** 1 unidad de costo. Así:

$$Min\, z = ([3 - (1 + 0.001)]x_1 + 2x_2)$$

$$sa.$$

$$\frac{x_1}{6}+\frac{x_2}{2}\geq 1$$

$$\frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{4}\geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Ahora la solución óptima se obtiene en $x_1^{¿}=3, x_2^{¿}=1, z^{¿}=7.997$

En el caso de un problema de **maximización**, "mejorado" significa "aumentado". En este caso, donde, por ejemplo, el coeficiente de la función objetivo podría representar la utilidad neta por unidad de la actividad, el valor de costo reducido indica cuánto tendría que **incrementarse la rentabilidad de la actividad para que la actividad ocurra en la solución optima**. Las unidades de los valores de costo reducido son las mismas que las unidades de los coeficientes de función objetivo correspondientes.

¿Podemos proporcionar un ejemplo de esta situación en caso de maximización?

Segunda interpretación

Un costo reducido también se puede interpretar **como el precio sombra de cada restricción de no-negatividad**. Si consideramos el problema:

$$Min\, z=(3x_1+2x_2)$$

$$sa.$$

$$\frac{x_1}{6}+\frac{x_2}{2}\geq 1$$

$$\frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{4}\geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Su solución óptima se obtiene en $x_1^{¿}=0, x_2^{¿}=4, z^{¿}=8$

Los costos reducidos son como sabemos $\bar{c}_1=1, \bar{c}_2=0$

Incrementando el lado derecho de la restricción de no-negatividad en 1, se tiene el problema:

$$Min\, z=(3x_1+2x_2)$$

$$sa.$$

$$\frac{x_1}{6}+\frac{x_2}{2}\geq 1$$

$$\frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{4}\geq 1$$

$$x_1\geq 1\,,x_2\geq 0$$

Cuya solución óptima es: $x_1^{¿}=1\,,x_2^{¿}=3\,,z^{¿}=9$

Lo importante es que el nuevo $z^{¿}=8+1=9$, indicando que el incremento en el valor óptimo es 1, que corresponde entonces al valor del costo reducido de la variable x_1.